ALGEBRA LINEARE - TEORIA

Risoluzione sistemi lineari 1
-Sistema diagonale
-Sistema triangolare
-Sistema scalare
Algoritmo di Gauss 2
-Algoritmo di Gauss-Jordàn
Vettori 4
-Definizioni di somma e prodotto
-Modulo di un vettore
-Proprietà dei vettori
-Prodotto scalare
Disuguaglianza di Schwartz 6
-Quarto assioma
-Vettori nel piano
Punto medio 8
Parallelogrammi 8
Posizione di due rette nello spazio 10
Equazione di un piano 11
-Distanza punto/piano
-Distanza di un punto da un piano definito da due vettori
-Distanza tra due rette sghembe
Prodotto vettore 12
-Area del parallelogramma definito da a e b
-Volume parallelepipedo sull'origine
-Piano passante per 3 punti
-Proprietà prodotto vettore
Combinazione lineare 14
-Span
Sottospazi 15
Dimensione finita 16
-Eliminazione di vettori generatori
-Lemma fondamentale
-Lemma di scambio
Indipendenza e dipendenza lineari 17
-Definizione di base di uno spazio
-Teorema di esistenza della base
-Coordinate di x rispetto alla base
-Teorema del massimo numero di vettori indipendenti
-Teorema dimensione di X
-Teorema generatori
-Teorema del completamento a base
-Extra: "integrale noto"
Lemma del sistema ortogonale (basi canoniche) 21
-Sistema ortonormale
-Completamento ortogonale
Intersezione di span 22
Comportamento di un sistema indipendente ad una base 23
Somma diretta 23
-Lemma di ripartizione di una base
-Dimensioni spazio dato da una somma diretta

Primo teorema di Grassman (sottospazi) 25
Applicazione lineare 27
-Nucleo dell'applicazione lineare
-Immagine dell'applicazione lineare
-Iniettività
-Suriettività
Secondo teorema di Grassman (applicazioni lineari) 29
-Lemma del generatore dell'immagine
Teorema di Cramer 30
Applicazioni lineari in base agli spazi di arrivo e di partenza 30
Matrice associata all'applicazione lineare 31
Come vedere la base dell'applicazione lineare 32
Come vedere se l'applicazione è iniettiva, suriettiva o biettiva 32
Come studiare il nucleo 33
Seno e coseno iperbolici 33
Matrice mxn 33
-Prodotto di matrici
-Convenzione di Einstein-Landau
-Matrice per vettore riga e vettore colonna
-Come calcolare la matrice inversa
Prodotto scalare nelle applicazioni lineari 38
Lavorare con righe e colonne di una matrice 39
Matrice trasposta e matrice autoaggiunta 40
Matrice associata composta 41
Identità 41
Matrice di cambio base e cambio coordinate 41
Determinante 42
-Teorema di Binet
-Formula di Cramer
-Formula di Laplace
-Matrice inversa con i determinanti
Teoria spettrale 45
-Definizione diagonale e diagonalizzabile
Definizioni di autovettore, autovalore e autospazio 46
-Teorema di indipendenza di autovettori distinti
-Teorema autovalori distinti e diagonalizzabilità
-Lemma somma diretta di autospazi
Spazio complesso 48
-Teorema degli spazi invariati (o esistenza degli autovettori)
-Polinomio caratteristico
-Teorema di Gauss (o fondamentale dell'algebra)
-Teorema dell'invarianza del polinomio caratteristico
-Teorema molteplicità di un autovettore
Teorema spettrale (somma diretta) 51
Prodotto scalare nei numeri complessi 52
Operatore autoaggiunto 52
-Lemma 1 (autovalori reali)
-Lemma 2 (autospazi ortogonali)
-Lemma 3 (invarianza complemento ortogonale negli autovettori)
-Somma diretta di vettori ortogonali
Polinomio di secondo grado (forme quadratiche) 54
-Metodo dei segni di Cartesio
-Metodo di Sylvester

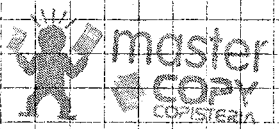
RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

a_{ij} = COEFFICIENTI
x_j = INCOGNITE
b_i = TERMINI NOTI

$(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$ è UNA SOLUZIONE di (x).

x_1	x_2	$\dots$	x_m	
a_{11}	a_{12}		a_{1m}	b_1
$\vdots$				
a_{m1}	a_{m2}		a_{mm}	b_m



- È sempre necessario indicare il numero di incognite
  R^m → ci sono m incognite
- Una COLONNA DI 0 si può eliminare, attribuendo a quella variabile un VALORE ARBITRARIO.
- Una RIGA DI 0 si può eliminare solo se il termine noto è anch'esso 0. Altrimenti, il sistema non ha soluzioni.
- SISTEMA DIAGONALE

x_1	x_2	$\dots$	x_m	
a_{11}	0		0	b_1
0	a_{22}			b_2
$\vdots$				
0	0		a_{mm}	b_m

$$a_{ij} = \begin{cases} a_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 x_1 = b_1 \\ \lambda_2 x_2 = b_2 \\ \lambda_m x_m = b_m \end{cases}$$

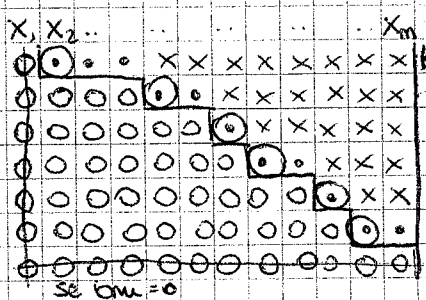
- SISTEMA TRIANGOLARE

1	2	3	b_1
0	4	5	b_2
0	0	6	b_3

- a_{ij} è triangolare se:
  → $a_{ij} = 0$ quando $i > j$
  → $a_{ii} \neq 0$
- Si risolve con una BACKWARD SUBSTITUTION, ossia si trova prima l'ultima incognita e poi si procede verso l'altro.
- $\forall (b_1, b_2, b_3)\ \exists (x_1, x_2, x_3)$ come UNICA SOLUZIONE



• SISTEMA SCALARE



⊙ elementi ≠ 0

⊠ elementi "non importanti"

⊙ elementi = 0

⊙ elemento PIVOT

• Gli elementi PIVOT (il primo valore ordine o perno) sono i primi elementi nella riga diversi da zero.
Le variabili corrispondenti sono dette VARIABILI PIVOT.

• Si procede lasciando a sinistra solo le variabili pivot, mentre si portano a destra le variabili NON-PIVOT, le quali assumeranno dei valori arbitrari (non influenzano le soluzioni).

• A questo punto otteniamo un sistema nella forma triangolare.

COME CONVERTIRE UN SISTEMA QUALUNQUE AL SISTEMA SCALARE: ALGORITMO DI GAUSS.

• Due sistemi che hanno le stesse soluzioni sono detti EQUIVALENTI.

① Permutazione di righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & b_2 \\ 0 & 1 & -3 & b_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & b_3 \\ 0 & 0 & 2 & b_2 \end{array}\right)$$

• Invertire le righe genera un sistema equivalente.

② Permutazione di colonne:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & b_2 \\ 0 & 3 & 0 & b_3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 3 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 2 & b_3 \end{array}\right)$$

• ATTENZIONE: i sistemi non sono equivalenti! Sarà infatti necessario invertire manualmente le variabili quando si andranno a scrivere le soluzioni.

③ Sommare o sottrarre le righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

• Sommare o sottrarre le righe, sostituendo la somma ad una delle due, darà origine ad un sistema equivalente

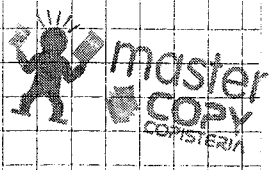
④ Moltiplicare i coefficienti e il termine noto per lo stesso opra:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & & 5 \\ 1 & 4 & 2 & & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & & 5 \\ 2 & 8 & 4 & & 6 \end{array}\right)$$

- Moltiplicare, sulla stessa riga, i coefficienti ed il termine noto per la stessa quantità di origine ad un sistema equivalente.
- Può essere molto utile per poi sommare o sottrarre per ottenere zero.

Esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftarrow II - 2I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$



- È sempre necessario specificare quali algoritmi di Gauss sono stati eseguiti per ricondurre il sistema ad una delle forme conosciute.

JORDÁN-GAUSS:

- Con il metodo dell'ALGORITMO DI GAUSS, si riconduceva il sistema prima alla forma SCALARE, per poi arrivare a quella TRIANGOLARE (risolvibile con la SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO, BACKWARD SUBSTITUTION).
- Con Jordán-Gauss, invece, si riconduce il sistema alla forma DIAGONALE se non addirittura alla MATRICE UNITARIA (o IDENTICA) che è una vera e propria soluzione del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

Ossia, si applicano gli stessi algoritmi di Gauss non solo per la parte in basso a sinistra, ma anche per quella in alto a destra.

